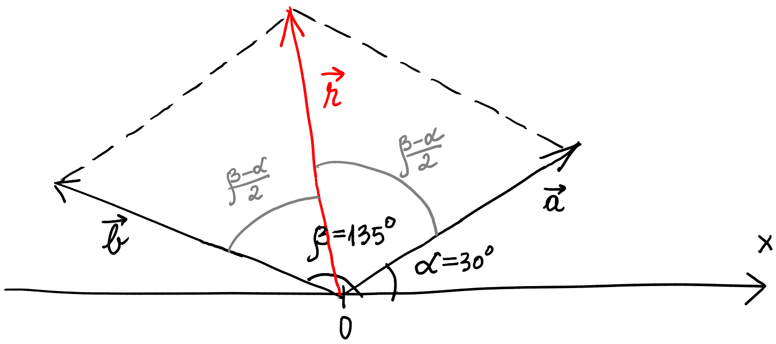
ELEMENTE DE CALCUL VECTORIAL

146 /25 Vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ au același modul $a=b=10$ și formează cu direcția pozitivă a axei Ox unghiurile $\alpha=30^\circ$, respectiv $\beta=135^\circ$. Să se determine modulul vectorului rezultant $\vec{r}$ și unghiul făcut de acesta cu axa Ox.

$a=b=10$
$\alpha=30^\circ$
$\beta=135^\circ$

$|\vec{r}|=?$
$\gamma=?$



$$r=\sqrt{a^2+b^2+2\cdot a\cdot b\cdot\cos(\beta-\alpha)}$$

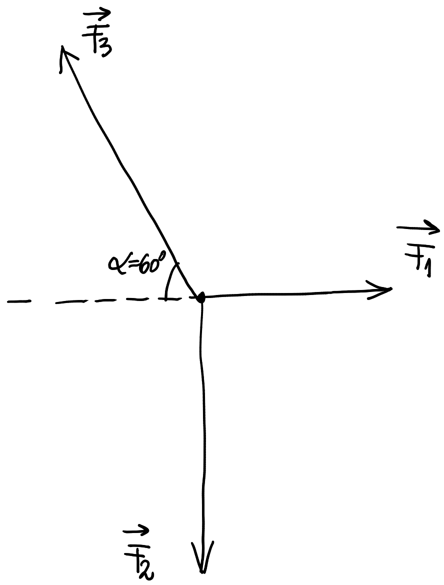
$$r=\sqrt{10^2+10^2+2\cdot 10\cdot 10\cdot\cos(135-30)}$$

$$r=12{,}17$$

vectorul $\vec{r}$ face cu orizontala unghiul $\varepsilon=\frac{\beta-\alpha}{2}+\alpha$

$$\varepsilon=82{,}5^\circ$$

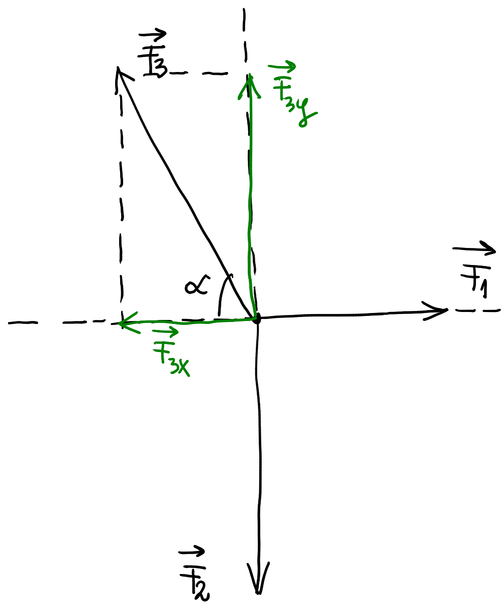
(147) /25 Forțele F_1, F_2 și F_3 din figură au rezultanta egală cu zero. Știind că $F_3 = 10N$, să se determine modulele celorlalte două forțe.



$\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = \vec{0}$

$F_3 = 10N$

$F_1 = ?$ $F_2 = ?$



$F_{3x} = F_3 \cos\alpha$

$F_{3y} = F_3 \sin\alpha$

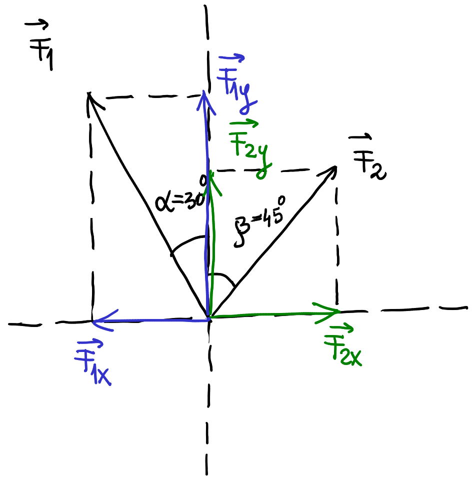
$$\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} F_1 = F_{3x} = F_3 \cos\alpha = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5N \\ F_2 = F_{3y} = F_3 \sin\alpha = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8{,}66N \end{cases}$$

148/25

Forțele $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ fac cu verticala, de o parte și de alta a ei, unghiuri de 30°, respectiv 45°. Știind că rezultanta lor are direcția verticală și modulul $F = 100N$, să se afle modulele forțelor $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$.

$\alpha = 30^\circ$
$\beta = 45^\circ$
$F = 100N$

$F_1 = ?\quad F_2 = ?$



$F_{1x} = F_1 \sin\alpha$

$F_{1y} = F_1 \cos\alpha$

$F_{2x} = F_2 \sin\beta$

$F_{2y} = F_2 \cos\beta$

$$\begin{cases} F = F_{1y} + F_{2y} \\ F_{1x} = F_{2x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 100 = F_1 \cdot \cos 30^\circ + F_2 \cdot \cos 45^\circ \\ F_1 \cdot \sin 30^\circ = F_2 \cdot \sin 45^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 100 = F_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + F_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} & (1) \\ F_1 \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = F_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} & (2) \end{cases}$$

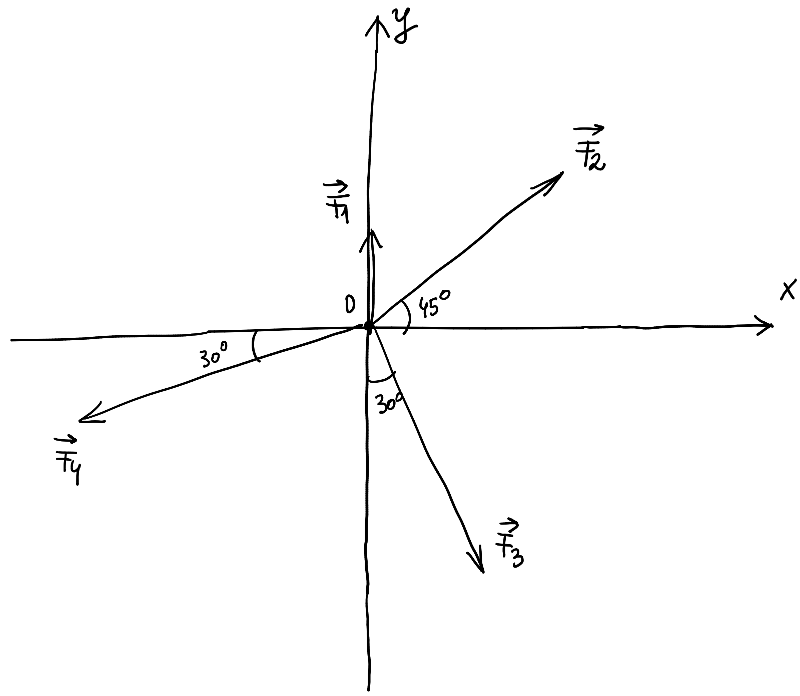
(2) în (1)

$$\Rightarrow \quad 100 = F_2\sqrt{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + F_2\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$F_2 = \frac{200}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = 51{,}76\,N$$

$$F_1 = 73{,}20\,N$$

149/25 Forțele din figură au modulele $F_1 = 2N$, $F_2 = F_3 = 4N$, $F_4 = 6N$. Să se determine modulul forței rezultante și unghiul făcut de aceasta cu axa Ox.



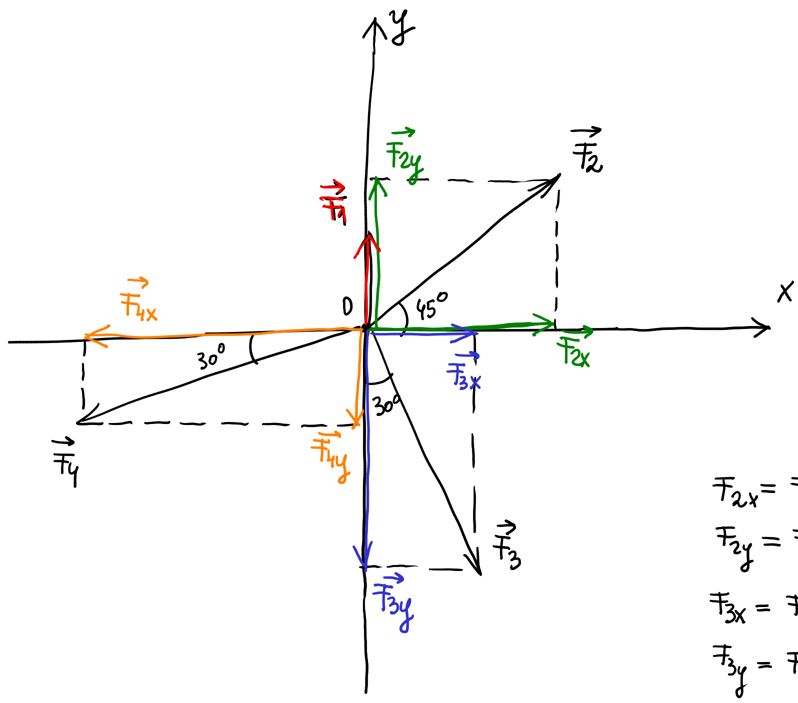
$F_1 = 2N$

$F_2 = F_3 = 4N$

$F_4 = 6N$

$R = ?$

$\gamma = ?$



$F_{2x} = F_2 \cos 45^\circ$

$F_{2y} = F_2 \sin 45^\circ$

$F_{3x} = F_3 \sin 30^\circ$

$F_{3y} = F_3 \cos 30^\circ$

$F_{4x} = F_4 \cos 30^\circ$

$F_{4y} = F_4 \sin 30^\circ$

Ox: $R_x = F_{2x} + F_{3x} - F_{4x}$

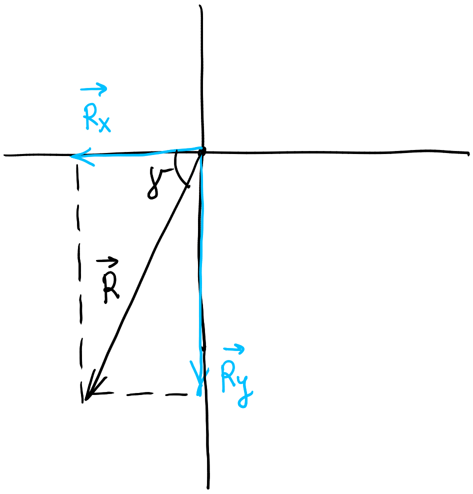
Oy: $R_y = F_1 + F_{2y} - F_{3y} - F_{4y}$

Ox: $R_x = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} - 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

Oy: $R_y = 2 + 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 6 \cdot \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} R_x = 2\sqrt{2} + 2 - 3\sqrt{3} \\ R_y = 2 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_x = -0{,}367 \\ R_y = -1{,}635 \end{cases}$$



$$\vec{R} = \vec{R_x} + \vec{R_y}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$R = 1{,}67\ N$$

vectorul $\vec{R}$ face cu orizontala unghiul γ:

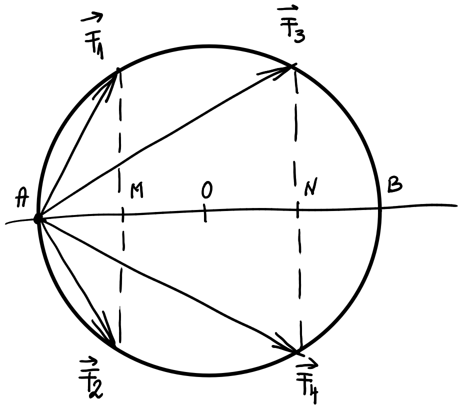
$$tg\,\gamma = \frac{CO}{CA} = \frac{R_y}{R_x}$$

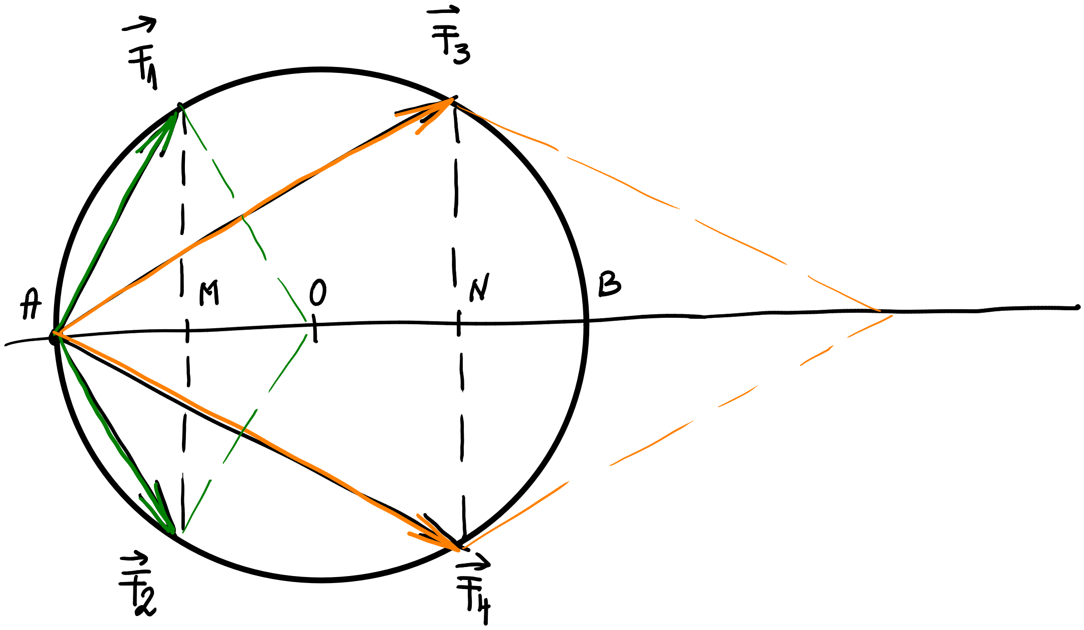
$$tg\,\gamma = \frac{-1{,}635}{-0{,}367}$$

$$\gamma = arctg\ 4{,}44$$

$$\gamma = 77{,}32^\circ$$

150/26 Cele patru forțe din figură au modulele egale cu coardele respective ale cercului de rază r. Știind că punctele M și N sunt simetrice față de centrul cercului, să se determine modulul forței rezultante.





Regula paralelogramului: $\vec{F}_{12} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

$|F_{12}| = AO = r$

Regula paralelogramului: $\vec{F}_{34} = \vec{F}_3 + \vec{F}_4$

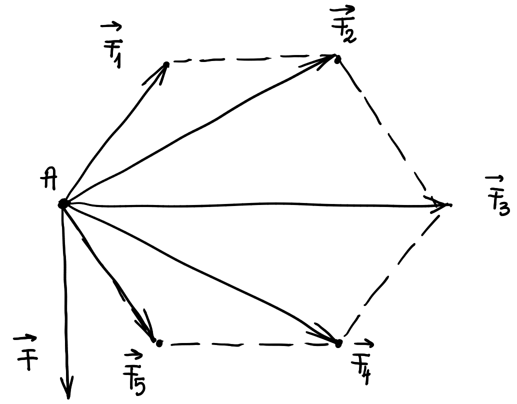
$|F_{34}| = 2 \cdot AN = 2 \cdot \left(r + \frac{r}{2}\right) = 3r$

Rezultanta: $\vec{R} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{34}$

$|R| = r + 3r = 4r$

$\vec{R}$ are direcție orizontală

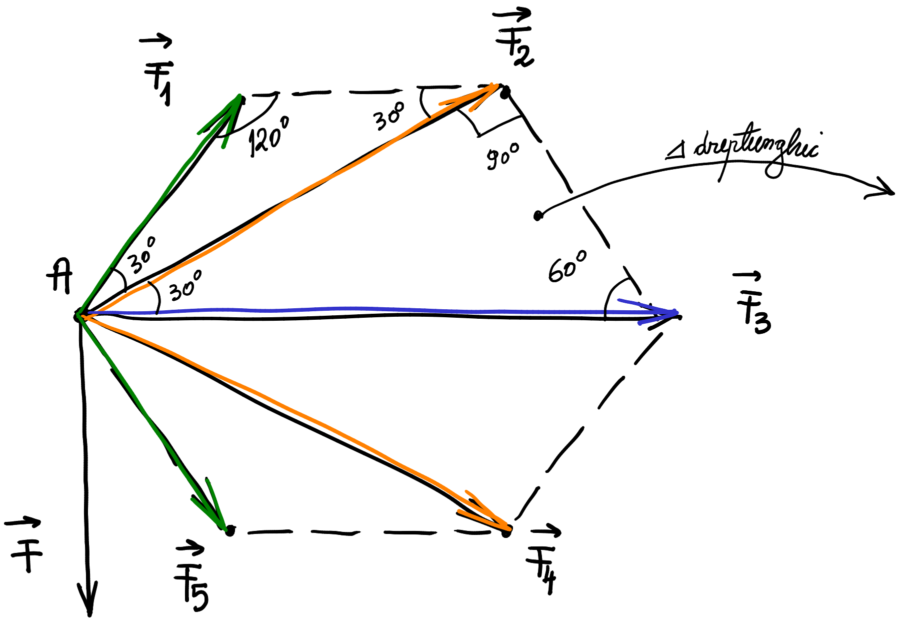
151/26 În vârful A al unui hexagon regulat acționează cinci forțe îndreptate după laturile și diagonalele hexagonului și o forță verticală $\vec{F}$. Știind că $F_1 = 10N$ și că rezultanta $\vec{R}$ a celor șase forțe are direcția forței F_5, să se afle modulele forței $\vec{F}$ și rezultantei $\vec{R}$.



$F_1 = 10N$

$\vec{R}$ are direcția lui $\vec{F_5}$

$F, R = ?$



$F_1 = F_5 = 10N$

$F_3 = 2 \cdot F_1 = 20N$

$F_2^2 = F_3^2 - F_1^2 \Rightarrow F_2 = \sqrt{20^2 - 10^2} = 10\sqrt{3}\ N$

$\vec{F_{15}} = \vec{F_1} + \vec{F_5}$

$F_{15} = \sqrt{F_1^2 + F_5^2 + 2F_1F_5 \cos 120°}$

$F_{15} = \sqrt{10^2 + 10^2 + \cancel{2} \cdot 10^2 \cdot \left(\frac{-1}{\cancel{2}}\right)}$

$F_{15} = 10N$

$\vec{F_{24}} = \vec{F_2} + \vec{F_4}$

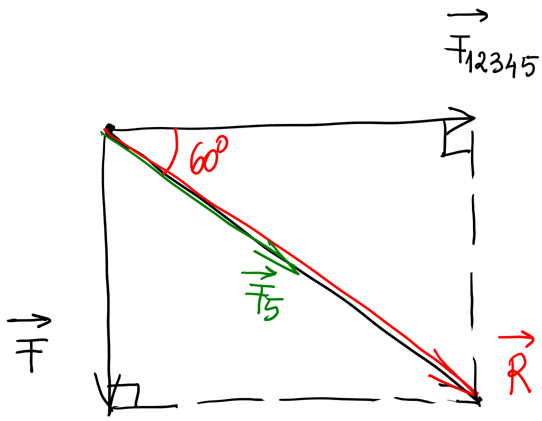
$F_{24} = \sqrt{F_2^2 + F_4^2 + 2 \cdot F_2 F_4 \cdot \cos 60°}$

$F_{24} = \sqrt{(10\sqrt{3})^2 + (10\sqrt{3})^2 + \cancel{2}(10\sqrt{3})^2 \cdot \frac{1}{\cancel{2}}}$

$F_{24} = 30N$

Rezultanta celor 5 forțe $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}, \vec{F_4}, \vec{F_5}$ $\quad \vec{F_{12345}}$ are direcție orizontală

$F_{12345} = F_{15} + F_{24} + F_3 = 10 + 20 + 30 = 60N$



$\vec{R}$ are direcția lui $\vec{F_5}$

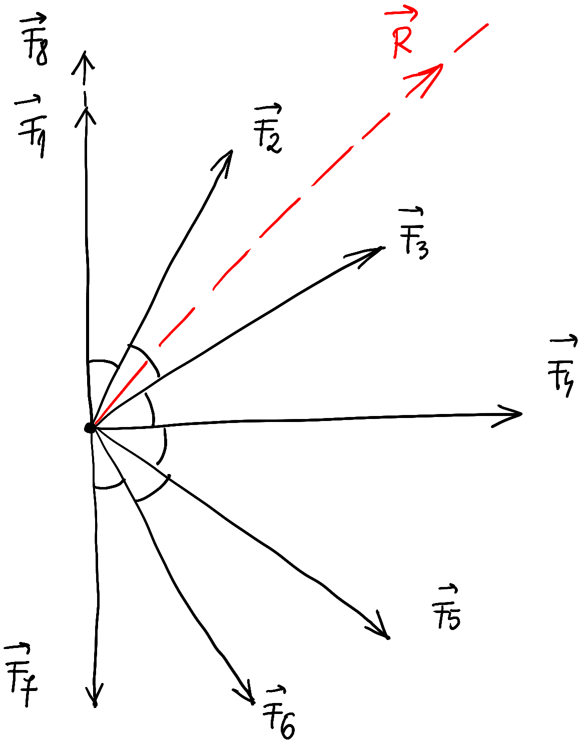
$\vec{R} = \vec{F}_{12345} + \vec{F}$

din teorema unghiului de 30° : $F_{12345} = \frac{R}{2} \Rightarrow R = 2 \cdot 60 = 120 N$

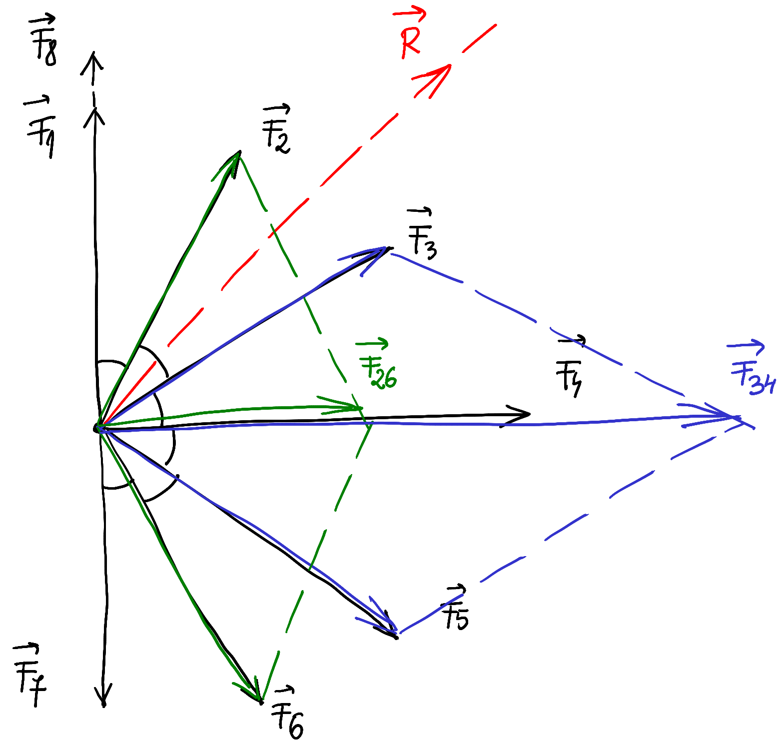
din teorema lui Pitagora : $F = \sqrt{R^2 - F_{12345}^2} = \sqrt{120^2 - 60^2} = 60\sqrt{3} N$

(103,92 N)

(152) Cele șapte forțe din figură formează între ele unghiuri egale și au același modul $F = 50N$. Care ar trebui să fie modulul unei forțe $\vec{F_8}$, care are direcția și sensul lui $\vec{F_1}$, astfel încât rezultanta celor opt forțe să aibă direcția bisectoarei unghiului format format de $\vec{F_2}$ și $\vec{F_3}$?



Compunem forțele folosindu-ne de simetria configurației forțelor!



OX: $R_x = F_{26} + F_{35} + F_4$

OY: $R_y = \cancel{F_1} + F_8 - \cancel{F_7}$

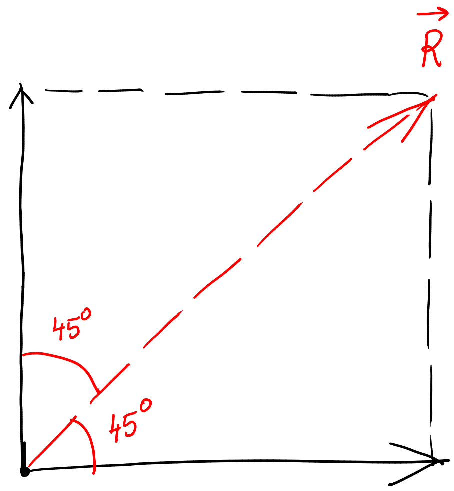
$F_{26} = \sqrt{F^2 + F^2 + 2 \cdot F F \underbrace{\cos 120}_{-1/2}}$

$F_{26} = F = 50N$

$F_{35} = \sqrt{F^2 + F^2 + 2 \cdot F F \cdot \underbrace{\cos 60}_{1/2}}$

$F_{35} = F\sqrt{3} = 50\sqrt{3}\,N$

$R_y = F_g$



$R_x = 100 + 50\sqrt{3}\ N$

$$R_x = F_{26} + F_{35} + F_4$$
$$= 50 + 50\sqrt{3} + 50$$
$$= 100 + 50\sqrt{3}\ N$$

din geometria configurației $\Rightarrow$ $R_y = R_x$

$$\boxed{F_g = 100 + 50\sqrt{3}\ N}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$\boxed{R = (100 + 50\sqrt{3})\sqrt{2}\ N}$$

(153) Să se afle unghiul format de vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ ale căror expresii analitice sunt:

$$\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$$
$$\vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$$

$$\Longrightarrow \quad \cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$
$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2+4^2+5^2} = \sqrt{9+16+25} = 5\sqrt{2}$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{4^2+5^2+(-3)^2} = \sqrt{16+25+9} = 5\sqrt{2}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (3\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k})\cdot(4\vec{i}+5\vec{j}-3\vec{k})$$

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= 3\vec{i}\cdot4\vec{i} + 3\vec{i}\cdot5\vec{j} + 3\vec{i}\cdot(-3)\vec{k}\\ &+4\vec{j}\cdot4\vec{i} + 4\vec{j}\cdot5\vec{j} + 4\vec{j}\cdot(-3)\vec{k}\\ &+5\vec{k}\cdot4\vec{i} + 5\vec{k}\cdot5\vec{j} + 5\vec{k}\cdot(-3)\vec{k}\end{aligned}$$

dar
$$\vec{i}\cdot\vec{i} = |\vec{i}|\cdot|\vec{i}|\cos 0 = 1\cdot1\cdot1 = 1$$
$$\vec{i}\cdot\vec{j} = |\vec{i}|\cdot|\vec{j}|\cdot\cos 90 = 1\cdot1\cdot0 = 0$$
$$\vec{i}\cdot\vec{k} = |\vec{i}|\cdot|\vec{k}|\cdot\cos 90 = 1\cdot1\cdot0 = 0$$
$$\vec{j}\cdot\vec{j} = |\vec{j}|\cdot|\vec{j}|\cdot\cos 0 = 1\cdot1\cdot1 = 1$$
$$\vec{k}\cdot\vec{k} = |\vec{k}|\cdot|\vec{k}|\cdot\cos 0 = 1\cdot1\cdot1 = 1$$

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= 3\vec{i}\cdot4\vec{i} + \cancel{3\vec{i}\cdot5\vec{j}}^{0} + \cancel{3\vec{i}\cdot(-3)\vec{k}}^{0}\\ &+\cancel{4\vec{j}\cdot4\vec{i}}^{0} + 4\vec{j}\cdot5\vec{j} + \cancel{4\vec{j}\cdot(-3)\vec{k}}^{0}\\ &+\cancel{5\vec{k}\cdot4\vec{i}}^{0} + \cancel{5\vec{k}\cdot5\vec{j}}^{0} + 5\vec{k}\cdot(-3)\vec{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= 12\cancel{\vec{i}\vec{i}}^{1} + 20\cancel{\vec{j}\vec{j}}^{1} + (-15)\cancel{\vec{k}\cdot\vec{k}}^{1}\\ &= 12+20-15\\ &= 17\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{17}{5\sqrt{2}\cdot5\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{17}{50}}$$

$$\boxed{\alpha = \arccos\frac{17}{50}}$$

(154) Expresiile analitice a doi vectori în spațiu sunt: $\vec{a} = m\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$

$\vec{b} = \vec{i} + m\vec{j} - 7\vec{k}$

Să se determine valoarea constantei m astfel încât cei doi vectori să fie perpendiculari: $\vec{a} \perp \vec{b}$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (m\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}) \cdot (\vec{i} + m\vec{j} - 7\vec{k})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = m\vec{i} \cdot \vec{i} + m\vec{i} \cdot m\vec{j} + m\vec{i} \cdot (-7\vec{k}) + 3\vec{j} \cdot \vec{i} + 3\vec{j} \cdot m\vec{j} + 3\vec{j} \cdot (-7\vec{k}) + 4\vec{k} \cdot \vec{i} + 4\vec{k} \cdot m\vec{j} + 4\vec{k} \cdot (-7\vec{k})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = m\vec{i} \cdot \vec{i} + \cancel{m\vec{i} \cdot m\vec{j}}^{\,0} + \cancel{m\vec{i} \cdot (-7\vec{k})}^{\,0} + \cancel{3\vec{j} \cdot \vec{i}}^{\,0} + 3\vec{j} \cdot m\vec{j} + \cancel{3\vec{j} \cdot (-7\vec{k})}^{\,0} + \cancel{4\vec{k} \cdot \vec{i}}^{\,0} + \cancel{4\vec{k} \cdot m\vec{j}}^{\,0} + 4\vec{k} \cdot (-7\vec{k})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = m\cancel{\vec{i} \cdot \vec{i}}^{\,1} + 3m\cancel{\vec{j} \cdot \vec{j}}^{\,1} - 28\cancel{\vec{k} \cdot \vec{k}}^{\,1}$$

$$= m + 3m - 28$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow m + 3m - 28 = 0$$

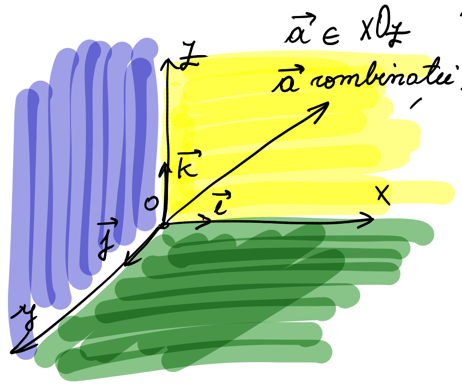
$$4m - 28 = 0$$

$$\boxed{m = 7}$$

155 Să se determine vectorul $\vec{a}$ din planul xOz de modul $|\vec{a}|=2$ și perpendicular pe vectorul $\vec{b}=3\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$.

$\vec{a}\in xOz$

$\vec{a}$ combinație de $\vec{i}$ și $\vec{k}$



$\vec{a}\in xOz$

$|\vec{a}|=2$

$\vec{a}\perp\vec{b}$

$\vec{b}=3\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k} \longrightarrow (a_x,a_y,a_z)$$

$$\boxed{\vec{a}\in xOz}\Rightarrow \vec{a}=a_x\vec{i}+0\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k} \longrightarrow (a_x,0,a_z)$$

$$\boxed{|\vec{a}|=2} \Rightarrow \sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=\sqrt{a_x^2+0^2+a_z^2}=2$$

$$\boxed{\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0}$$

$$(a_x\vec{i}+0\vec{j}+a_z\cdot\vec{k})\cdot(3\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k})=0$$

$$3a_x\cancel{\vec{i}\vec{i}}^{1}+0\cdot(-2)\cancel{\vec{j}\vec{j}}^{1}+4a_z\cancel{\vec{k}\vec{k}}^{1}=0$$

$$\Rightarrow 3a_x+4a_z=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\sqrt{a_x^2+a_z^2}=2\\ 3a_x+4a_z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a_x^2+a_z^2=4\\ 3a_x+4a_z=0 \rightarrow a_z=\frac{-3a_x}{4}\end{cases}$$

Înlocuind $\Rightarrow$ $a_x^2+\left(\frac{-3a_x}{4}\right)^2=4$

$$a_x^2+\frac{9a_x^2}{16}=4 \quad \Big|\cdot 16$$

$$16a_x^2+9a_x^2=16\cdot 4$$

$$25a_x^2=16\cdot 4$$

$$a_x^2=\frac{16\cdot 4}{25}$$

$$\Rightarrow a_x=\frac{4\cdot 2}{5}=\frac{8}{5}$$

$$a_z=-\frac{3}{\cancel{4}}\frac{\cancel{8}^2}{5}=\frac{-6}{5}$$

$$\Longrightarrow \begin{matrix}a_x=\frac{8}{5}\\ a_y=\frac{-6}{5}\end{matrix}$$

$$\boxed{\vec{a}=\frac{8}{5}\vec{i}+0\vec{j}-\frac{6}{5}\vec{k}} \quad \left(\frac{8}{5},0,-\frac{6}{5}\right)$$

(156) Care este valoarea unghiului α dintre doi vectori dacă produsul scalar al acestora este egal cu modulul produsului lor vectorial?

$\alpha = ?$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a} \times \vec{b}|$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha$

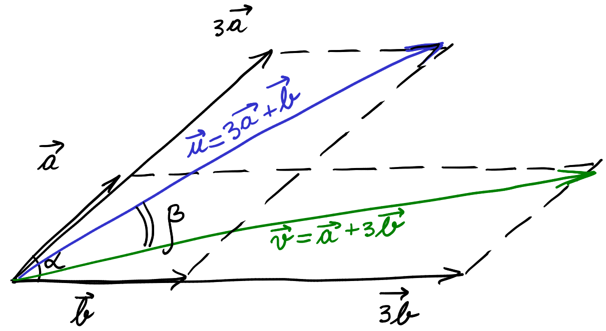
$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a} \times \vec{b}|$

$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha = |\vec{a}| |\vec{b}| \cdot \sin\alpha$

$\cos\alpha = \sin\alpha$

$\Rightarrow \alpha = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$

157) Unghiul dintre vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ de module $a=b=1$ este $\alpha=30^\circ$.
Să se calculeze aria paralelogramului care are drept laturi vectorii: $\vec{u}=\vec{a}+3\vec{b}$
$\vec{v}=3\vec{a}+\vec{b}$



- $A_{\square} = |\vec{u}\times\vec{v}|$
  $= |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\sin(\vec{u},\vec{v})$

- $|\vec{u}| = \sqrt{1^2+3^2+2\cdot1\cdot3\cdot\cos 30^\circ} = \sqrt{10+3\sqrt{3}}$
  $|\vec{v}| = \sqrt{1^2+3^2+2\cdot1\cdot3\cdot\cos 30^\circ} = \sqrt{10+3\sqrt{3}}$

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\cdot\cos\beta$

$$\cos\beta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}$$

$$\cos\beta = \frac{(\vec{a}+3\vec{b})(3\vec{a}+\vec{b})}{\sqrt{10+3\sqrt{3}}\cdot\sqrt{10+3\sqrt{3}}}$$

$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\,|\vec{a}|\cdot\cos 0 = 1\cdot1\cdot1 = 1$
$\vec{b}\cdot\vec{b} = |\vec{b}|\,|\vec{b}|\cdot\cos 0 = 1\cdot1\cdot1 = 1$
$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cdot\cos 30 = 1\cdot1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos\beta = \frac{3\vec{a}\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+3\vec{b}\cdot3\vec{a}+3\vec{b}\cdot\vec{b}}{10+3\sqrt{3}}$$

$$\cos\beta = \frac{3\cdot1+10\vec{a}\vec{b}+3\cdot1}{10+3\sqrt{3}}$$

$$\cos\beta = \frac{6+10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{10+3\sqrt{3}}$$

$$\cos\beta = \frac{6+5\sqrt{3}}{10+3\sqrt{3}}$$

- $\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-\left(\frac{6+5\sqrt{3}}{10+3\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{(10+3\sqrt{3})^2-(6+5\sqrt{3})^2}{(10+3\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{100+\cancel{60\sqrt{3}}+27-36-\cancel{60\sqrt{3}}-75}}{10+3\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \sin\beta = \frac{4}{10+3\sqrt{3}}$

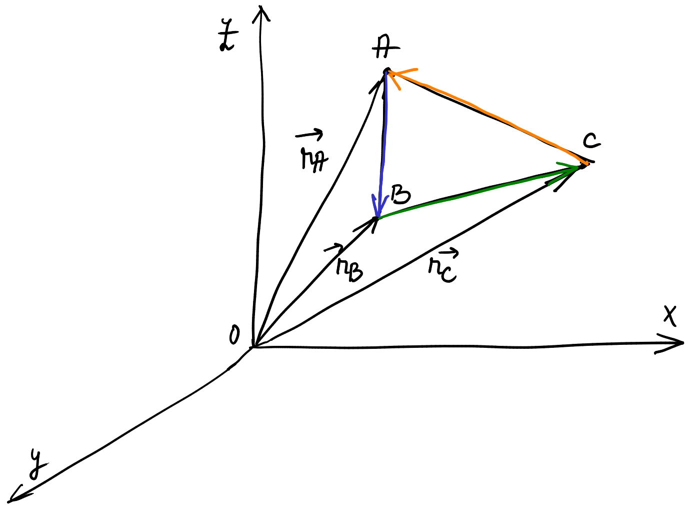
$\Longrightarrow A_{\square} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\sin\beta = \cancel{(10+3\sqrt{3})}\cdot\frac{4}{\cancel{(10+3\sqrt{3})}}$

$$\boxed{A_{\square}=4}$$

(158) Vectorii de poziție ai trei puncte A, B, C din spațiu sunt:

$$\vec{r_A} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$$
$$\vec{r_B} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$
$$\vec{r_C} = \vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$$

Să se arate că triunghiul ABC este echilateral.



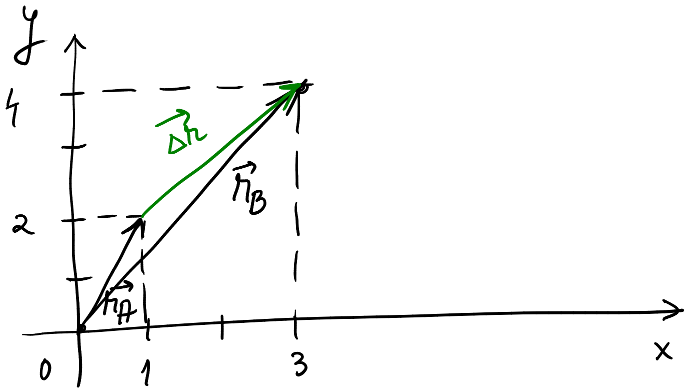
$$\begin{cases} \vec{r_{BA}} = \vec{r_B} - \vec{r_A} \\ \vec{r_{CB}} = \vec{r_C} - \vec{r_B} \\ \vec{r_{AC}} = \vec{r_A} - \vec{r_C} \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \vec{r_{BA}} &= (3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) - (\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}) = 2\vec{i} + 0\vec{j} - 2\vec{k} \\ \vec{r_{CB}} &= (\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}) - (3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 0\vec{k} \\ \vec{r_{AC}} &= (\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}) - (\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}) = 0\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} \end{aligned}$$

Lungimile laturilor triunghiului ABC:

$$|\vec{r_{BA}}| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$$
$$|\vec{r_{CB}}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 0^2} = 2\sqrt{2}$$
$$|\vec{r_{AC}}| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$\Longrightarrow$ ΔABC este echilateral

(159) Un mobil se deplasează în planul xOy între punctele $A(1,2)$ și $B(3,4)$.
Să se construiască modulul vectorului deplasare și să se calculeze lungimea sa.



$$\vec{\Delta r} = \vec{r_B} - \vec{r_A}$$

$$\vec{\Delta r} = (3\vec{i} + 4\vec{j}) - (\vec{i} + 2\vec{j})$$

$$\vec{\Delta r} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$|\vec{\Delta r}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

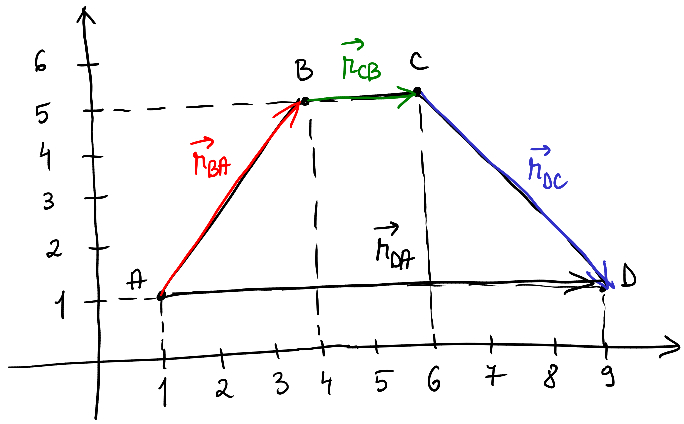
(160) Un mobil se deplasează pe traiectoria ABCD, cele patru puncte având coordonatele (exprimate în metri): A(1,1), B(4,5), C(6,5), D(9,1). Să se determine modulul vectorului deplasare și distanța totală parcursă de corp.

$$\vec{r}_A = \vec{i} + \vec{j}$$
$$\vec{r}_B = 4\vec{i} + 5\vec{j}$$
$$\vec{r}_C = 6\vec{i} + 5\vec{j}$$
$$\vec{r}_D = 9\vec{i} + \vec{j}$$

deplasarea de la A la B: $\vec{r}_{BA} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (4\vec{i}+5\vec{j}) - (\vec{i}+\vec{j}) = 3\vec{i}+4\vec{j}$ $\quad |\vec{r}_{AB}| = \sqrt{3^2+4^2} = 5\ m$

deplasarea de la B la C: $\vec{r}_{CB} = \vec{r}_C - \vec{r}_B = (6\vec{i}+5\vec{j}) - (4\vec{i}+5\vec{j}) = 2\vec{i}+0\vec{j}$ $\quad |\vec{r}_{BC}| = \sqrt{2^2+0^2} = 2\ m$

deplasarea de la C la D: $\vec{r}_{DC} = \vec{r}_D - \vec{r}_C = (9\vec{i}+\vec{j}) - (6\vec{i}+5\vec{j}) = 3\vec{i}-4\vec{j}$ $\quad |\vec{r}_{CD}| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = 5\ m$

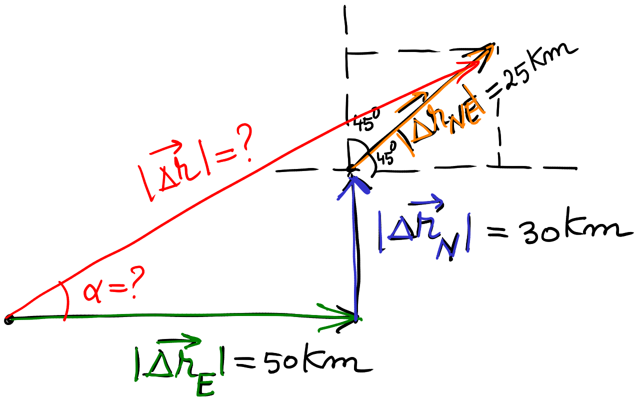


vectorul deplasare totală $\vec{r}_{DA} = \vec{r}_D - \vec{r}_A = (9\vec{i}+\vec{j}) - (\vec{i}+\vec{j}) = 8\vec{i}+0\vec{j}$ $\quad |\vec{r}_{DA}| = \sqrt{8^2+0^2} = 8\ m$

distanța totală parcursă este $|\vec{r}_{BA}| + |\vec{r}_{CB}| + |\vec{r}_{DC}| = 5m + 2m + 5m = 12m$

(161) Un vehicul se deplasează spre est pe o distanță de 50Km, apoi spre nord cu 30Km și în continuare spre nord-est cu 25Km. Să se afle modulul și direcția vectorului deplasare al vehiculului.

$$\Delta\vec{r}_E = 50\vec{i} + 0\vec{j}$$
$$\Delta\vec{r}_N = 0\vec{i} + 30\vec{j}$$
$$\Delta\vec{r}_{NE} = 25\sqrt{2}\,\vec{i} + 25\sqrt{2}\,\vec{j}$$



$|\Delta\vec{r}| = ?$

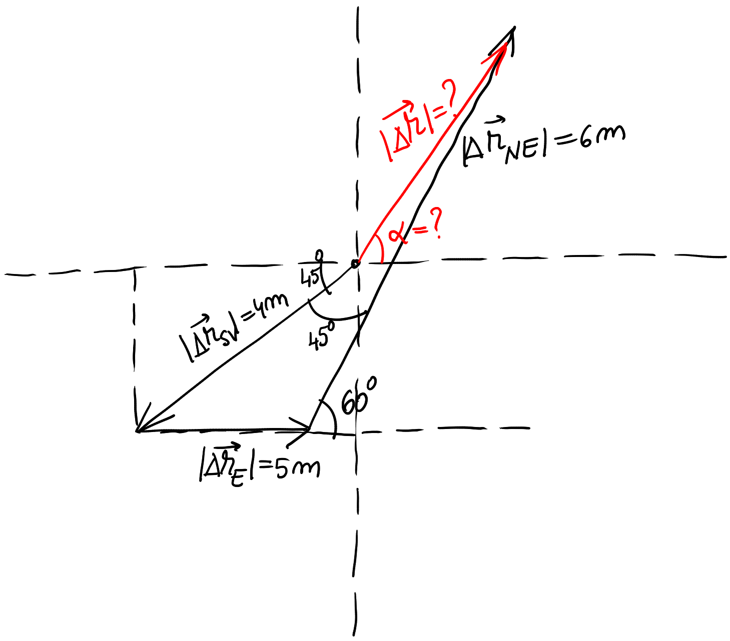
$\alpha = ?$

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}_E + \Delta\vec{r}_N + \Delta\vec{r}_{NE}$$
$$\Delta\vec{r} = \left(50\vec{i} + 0\vec{j}\right) + \left(0\vec{i} + 30\vec{j}\right) + \left(25\sqrt{2}\,\vec{i} + 25\sqrt{2}\,\vec{j}\right)$$
$$\Delta\vec{r} = \left(50 + 25\sqrt{2}\right)\vec{i} + \left(30 + 25\sqrt{2}\right)\vec{j}$$

$$\boxed{|\Delta\vec{r}| = \sqrt{\left(50+25\sqrt{2}\right)^2 + \left(30+25\sqrt{2}\right)^2}}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{30+25\sqrt{2}}{50+25\sqrt{2}}}$$

(162) Un punct material efectuează trei deplasări succesive într-un plan xOy după cum urmează: 4 m spre sud-vest, 5 m spre est, 6 m spre nord-est într-o direcție care face 60° cu direcția est. Să se afle mărimea și direcția deplasării rezultante.



$$\Delta\vec{r}_{SV} = -4\sqrt{2}\,\vec{i} - 4\sqrt{2}\,\vec{j}$$

$$\Delta\vec{r}_E = 5\vec{i} + 0\vec{j}$$

$$\Delta\vec{r}_{NE} = 6\cos 60°\,\vec{i} + 6\sin 60°\,\vec{j} = 3\vec{i} + 3\sqrt{3}\,\vec{j}$$

$$\vec{\Delta r} = \Delta\vec{r}_{SV} + \Delta\vec{r}_E + \Delta\vec{r}_{NE}$$

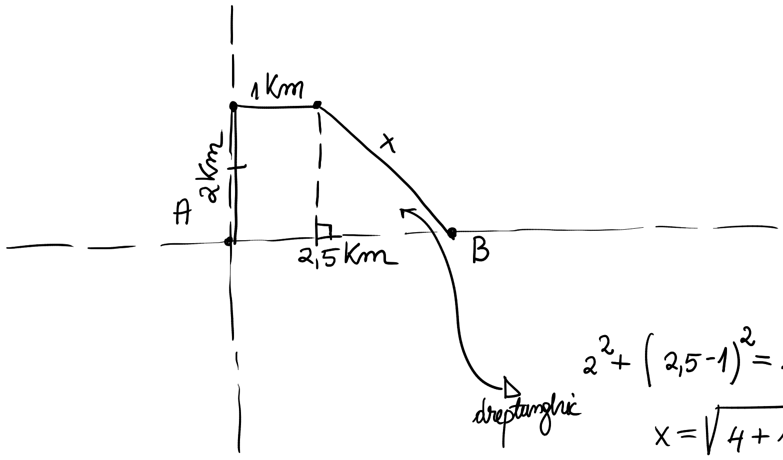
$$= (-4\sqrt{2}+5+3)\,\vec{i} + (-4\sqrt{2}+0+3\sqrt{3})\,\vec{j}$$

$$\vec{\Delta r} = (8-4\sqrt{2})\,\vec{i} + (3\sqrt{3}-4\sqrt{2})\,\vec{j}$$

$$\boxed{|\vec{\Delta r}| = \sqrt{(8-4\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{3}-4\sqrt{2})^2}}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{3\sqrt{3}-4\sqrt{2}}{8-4\sqrt{2}}}$$

(163) Un turist pleacă din punctul A și merge 2Km către nord, apoi 1Km către est. În continuare el se deplasează către sud-est și ajunge într-un punct B aflat la 2,5Km la est de A. Câți Km a mers turistul?



$$2^2 + (2{,}5-1)^2 = x^2$$

$$x = \sqrt{4 + 1{,}5^2}$$

$$x = 2{,}5$$

$$d = 2\text{Km} + 1\text{Km} + x\text{Km}$$

$$d = 2 + 1 + 2{,}5$$

$$d = 5{,}5\text{Km}$$

(164) Expresiile analitice ale vectorilor de poziție la două momente diferite din timpul mișcării unui punct material sunt: $\vec{r}_1 = 5\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{r}_2 = -2\vec{i} + 3\vec{j}$.
Să se determine modulul și direcția vectorului deplasare.

$$\vec{r}_1 = 5\vec{i} + \vec{j}$$
$$\vec{r}_2 = -2\vec{i} + 3\vec{j}$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (-2\vec{i} + 3\vec{j}) - (5\vec{i} + \vec{j})$$
$$\Delta\vec{r} = -7\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(-7)^2 + (2)^2} = \sqrt{53}$$
$$tg\alpha = \frac{2}{-7}$$

(165) Într-un interval de timp $\Delta t = 2s$, un mobil se deplasează între două puncte care au vectorii de poziție $\vec{r_1} = 5\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{r_2} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$. Să se determine viteza medie a mobilului între cele două puncte. Distanțele sunt exprimate în metri.

$\vec{r_1} = 5\vec{i} - \vec{j}$
$\vec{r_2} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$
$\Delta t = 2s$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$$
$$\Delta\vec{r} = (2\vec{i} + 3\vec{j}) - (5\vec{i} - \vec{j})$$
$$\Delta\vec{r} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$$

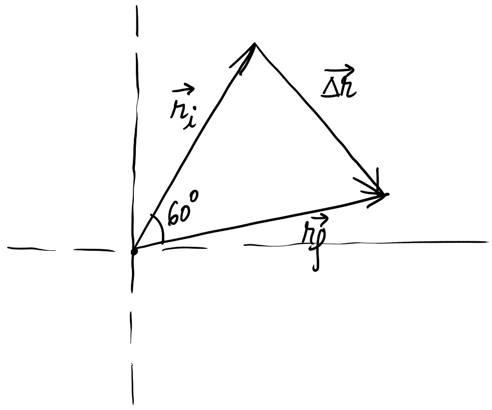
$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{-3\vec{i} + 4\vec{j}}{2}$$

$$\boxed{\vec{v} = -1,5\,\vec{i} + 2\vec{j}}$$

$$\boxed{\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}}$$

$v_x = -1,5\ m/s$ viteza pe OX
$v_y = +2\ m/s$ viteza pe OY

(166) După $\Delta t = 1{,}5\,s$ de la începerea mișcării unui punct material vectorul său de poziție are același modul $r = 6m$, dar direcția modificată cu $\alpha = 60°$. Care este modulul vitezei medii a punctului material pe intervalul de timp considerat?



$|\vec{r_i}| = |\vec{r_f}| = 6m \Rightarrow$ triunghiul este isoscel

$\alpha = 60° \Rightarrow$ triunghiul este echilateral

$|\vec{\Delta r}| = 6\,m$

$$\vec{v} = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}$$

$$|\vec{v}| = \frac{|\vec{\Delta r}|}{\Delta t} = \frac{6m}{1{,}5s}$$

$$|\vec{v}| = 4\frac{m}{s}$$

(167) Dependența de timp a vectorului de poziție al unui punct material este dată de ecuația $\vec{r} = at\vec{i} + b\vec{j}$. Care este expresia analitică a vitezei punctului material?

$$\vec{r} = at\vec{i} + b\vec{j}$$

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$$

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{at_2 - at_1}{t_2 - t_1} = a$$

$$v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{b - b}{\Delta t} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = a\vec{i} + 0\vec{j}}$$